

MATEMÁTICAS EN EL COMERCIO HABITUAL

Los dígitos y letras de control

- **La prueba del NUEVE**

Tomemos por ejemplo 123 y lo escribimos $1 \times 100 + 2 \times 10 + 3$. Como $100 = 99 + 1$ y $10 = 9 + 1$ resulta que 123 es (múltiplo de 9) + 1 + 2 + 3 o sea (múltiplo de 9) + 6. Entonces 6 es lo que le sobra a 123 cuando lo dividimos por 9, o sea el resto de dividirlo por 9.

Propiedad general: el resto de dividir un entero positivo por 9 es el resultado de sumar sus cifras. Si esta suma es igual o mayor que 9 se le resta de nueve en nueve las veces que haga falta para que quede un número entre 0 y 8.

Ejemplo A: 4988. Suman 29. Al quitarle 9, quedan 20. Después 11 y finalmente 2. Es el resto de dividir 4988 por 2.

Ejemplo B: 327. Suman 12. Al quitarle 9, quedan 3.

Por tanto

$4987 = \text{múltiplo de nueve} + 2$

$327 = \text{múltiplo de nueve} + 3$

Al multiplicar 4988 por 327 estamos multiplicando

(múltiplo de nueve + 2)(múltiplo de nueve + 3) =

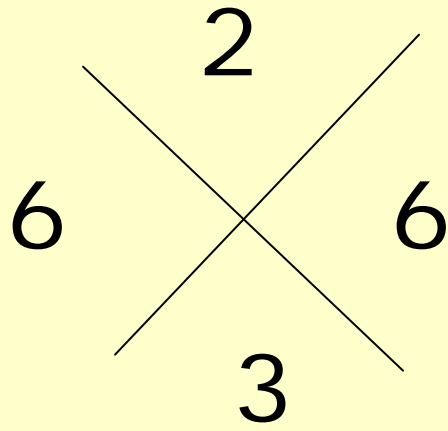
múltiplo de nueve + múltiplo de nueve + múltiplo de nueve + 6

o sea que el resultado tiene que ser múltiplo de nueve + 6 y si no habrá un error en la multiplicación.

Por tanto si alguien me dice que

$$4988 \times 327 = 1631076,$$

la suma de las cifras de 1631076 debería ser un múltiplo de nueve más 6. Efectivamente da 24, que es $18+6$. Si hubieran dicho 1631074 hubiera detectado error. Pero si hubieran dicho 1613076 no lo hubiera detectado.



Hoy eso ya no se lleva en la escuela, pero la idea sí para los dígitos de control de muchos códigos como veremos.

- **Los dígitos de control**

Se añaden a una serie de números que forma un código para controlar errores.

Ejemplo: Un comerciante tiene en un gran almacén varios centenares de clases de artículos distintos. Las numera del 000 al 999 y no necesariamente correlativos.

Cuando alguien solicita el 547 puede equivocarse al teclear y pedir el 517. Una manera simple de evitar **algunos** errores de este tipo es añadir un dígito de control: por ejemplo se le añada a cada código de artículo un cuarto dígito de forma que la suma de los cuatro dígitos sea múltiplo de 9. Así los artículos se designarán:

**0018, 0027, 0036, ..., 5472,
5481, ..., 9990**

Cuando un empleado al querer solicitar el **5472** se ha equivocado y tecleado **5172** el ordenador detecta que los dígitos suman 15 y rechaza la petición como error.

En esta codificación de 4 dígitos se dice que el cuarto es el dígito de control. Esto tan simple no detecta el error por "baile" de dígitos, por ejemplo al teclear en vez de **5472** el **5742** no detectará el error.

Por eso los dígitos de control se suelen construir mucho más complicados: sumando las cifras de lugar par por un lado, las de lugar impar por otro, y haciendo algunas operaciones con ellas.

Otro ejemplo: las cuentas bancarias.

Las cuentas bancarias van identificadas con 20 dígitos. Por ejemplo

4133 2241 76 0134017896

Los 4 primeros dígitos identifican al Banco y los 4 siguientes su agencia. Por tanto **no hay que añadir el nombre del banco ni la agencia.** Los 10 últimos dígitos son los de nuestra cuenta. Y los dígitos noveno y décimo, en este caso 76, son los dígitos de control para evitar errores.

El primer dígito de control es para la zona Banco-Agencia y el segundo para nuestra cuenta. Un error en cualquier cifra será detectado como tal y la operación se detendrá para subsanarlo. Para mayor seguridad, el propio banco suele tener, en la zona de nuestra cuenta, en los 10 últimos dígitos, sus propios dígitos de control.

Así de las 10 últimas cifras las primeras pueden designar el tipo de cuenta (libreta, corriente,...) después viene el número propiamente dicho y luego unos dígitos de control interno de ese banco. Por eso es muy difícil que los errores no se detecten.

- **Otra forma de control: el NIF o CIF**

El simple número del DNI identifica a cada individuo español. Sin embargo había mucho errores al transcribirlo, por ejemplo para Hacienda, sin que pudiera achacarse mala fe. Se va a añadir un "control" pero en este caso no será un dígito sino una letra.

De las letras del alfabeto se eliminan la I, la Ñ, la O y la U que pueden causar confusión con otras letras o con cifras, y nos quedan **23**.

Se divide el número del DNI por 23 sin decimales y nos quedamos con el resto, que estará entre 0 y 22. Se le asigna una de las 23 letras.

Para más "seguridad" no se asignan en orden alfabético sino en una clave "secreta" que naturalmente se cuela en revistas y periódicos en aquella época:

0=T	1=R	2=W	3=A	4=G
5=M	6=Y	7=F	8=P	9=D
10=X	11=B	12=N	13=J	14=Z
15=S	16=Q	17=V	18=H	19=L
20=C	21=K	22=E		

Ejemplo: 18158031 al dividirlo por 23 da de resto **14** (cociente 78947 pero no sirve para nada) y por tanto le corresponde una Z

Dificultad práctica: Si en una duda alguien quiere confirmarlo, por ejemplo en una entidad bancaria (donde tienen la clave) no se van a poner a hacer la división a mano. Pero las calculadoras no hacen división entera, sino con decimales.

Entonces se divide **18158031** por **23** y sale **78947'608** Se toma la parte entera, **78947**, se multiplica por **23** y se le resta a **18158031**.

Esto es porque cuando el cociente se toma entero sin decimales se tiene

$$\text{Dividendo} = (\text{Divisor} \times \text{Cociente}) + \text{Resto}$$

Y por tanto

$$\text{Resto} = \text{Dividendo} - (\text{Divisor} \times \text{Cociente})$$

Con este sistema para el NIF si alguien para confundir cambia un dígito o intercambia dos, la letra no será la correcta.

Ojo, no es infalible. Si le sumamos a nuestro número un múltiplo de 23 la letra es la misma.

Pero el error ya es muy descartado.

- **Dígito de control en los billetes en euros**

Número de serie: Letra (país), 10 dígitos y el de control, entre 1 y 9.



Z	Bélgica
Y	Grecia
X	Alemánia
(W)	Dinamarca
V	España
U	Francia
T	Irlanda
S	Italia
(R)	Luxemburgo
(Q)	No se usa
P	Holanda
(O)	No se usa
N	Austria
M	Portugal
L	Finlandia
(K)	Suiza
(J)	Reino Unido

A 1; B 2; C 3; D 4; E 5; F 6

P 16; U 21; V 22; X 24...Z 26

Se suma al número del país los 10 dígitos siguientes.

Del número que resulta interesa su resto al dividirlo por 9: se suman sus cifras y así sucesivamente hasta que quede una sola. Si es 9 se le resta 9 y resulta 0. Así tenemos un número x entre 0 y 8.

La diferencia $8-x$ es el dígito de control. Si sale 0 se le asigna un 9.

Ejemplo: V2785957397..

$$22 + 2 + 7 + 8 + 5 + 9 + 5 + 7 + 3 + 9 + 7 = 84 \rightarrow 8 + 4 = 12 \rightarrow$$

$$1 + 2 = 3 \rightarrow 8 - 3 = 5.$$

Será V27859573975



M	Fábrica Nacional de Moneda y Timbr Madrid
<u>R</u>	Bundesdruckerei Berlin

Códigos para todo

Códigos postales: España: **50009**

(dos + tres cifras) o E-50009

USA: 55812-1234. Las cinco primeras cifras son obligatorias: el primer dígito identifica un grupo de Estados. Los dos siguientes un centro de distribución dentro de la zona del primero. Los dos siguientes la ciudad o la oficina de correos dentro del centro de distribución anterior. Los últimos 4 delimitan barrios, manzanas o la planta de un gran edificio.

ISBN: (International Standard Book Number)

Todos los libros lo tienen. Es uno de los mejor hechos y con mejor control. Por ejemplo ISBN 84-7829-020-6

Los 2 dígitos iniciales, 84, dicen que está publicado en España. El siguiente bloque, 7829, es la Editorial. El bloque tercero es el número que la editorial le asigna a ese título, y el último dígito, 6, es el de control.

Lo asignan de forma que al multiplicar 10 por el primer dígito, 9 por el segundo, 8 por el tercero, etc, 2 por el penúltimo y 1 por el último y sumar debe salir un múltiplo de 11. En este caso:

$80 + 36 + 56 + 56 + 12 + 45 + 0 + 6 + 0$ suman 291. El último debe ser un 6 porque 297 es 27 por 11. Si hubiera que poner 10 se pondría la letra X para evitar alargar.

También está el ISSN para revistas y publicaciones seriadas.

Para que los códigos puedan ser leídos rápidamente se transforman en códigos de barras y se ponen los dos.

Ejemplo:



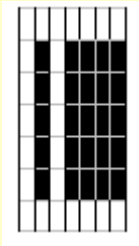
Hay varios tipos de códigos de barras. El código UPC (Universal Product Code) apareció en 1973 para los alimentos y se ha extendido a casi toda la venta al por menor. Es un número de 12 dígitos en 4 bloques.

Primero hay un solo dígito que depende del tipo de producto: el 2 para peso variable, el 3 medicamento o análogo, el 9 libro, etc.

Luego hay unas barras patrón, y un grupo de 5 dígitos que identifica al fabricante. Hay unas barras de separación y otros 5 dígitos que identifican al producto, y que puede indicar color, tamaño, etc. Siguen otras barras de separación y un último dígito de control



Cada carácter numérico debe tener obligatoriamente dos barras y dos espacios. En total tiene que haber 7 módulos.



European Article Numbering (E.A.N.)

El EAN es la versión propia del UPC europea, se creó en 1976.

El EAN-13 es la versión más difundida del sistema EAN y consta de un código de 13 cifras (uno más que el UPC).

Los dos primeros dígitos identifican al país, los cinco siguientes a la empresa productora, los cinco dígitos posteriores al artículo y finalmente un dígito de control:

	Número del país	Número Empresa	Número del producto	Carácter de control
	84	12345	67890	0
	España	Empresa, S.A. Plaza España, S/N Zaragoza	Melocotón en almíbar 500 g.	Código de seguridad
Origen del número	Asociación europea de codificación de productos EAN	Asociación española de codificación comercial (AECOC)	Industrial o fabricante	Algoritmo matemático

EAN. Suma lugares pares multiplicada por 3 + suma de lugares impares = $72 + 33 = 105$. El control debe ser 5 en vez de 0 porque debe sumar múltiplo de 10



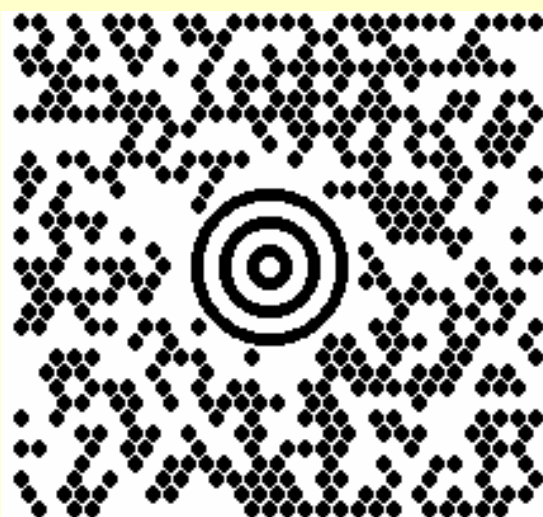
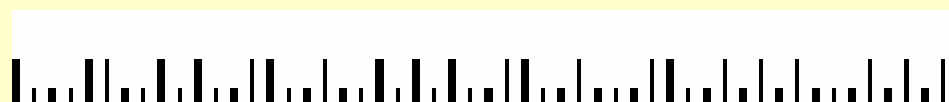
$$8 + 1 + 0 + 4 + 1 + 2 = 16;$$

$$4 + 0 + 5 + 0 + 0 + 7 = 16;$$

$16 \times 3 + 16 = 64$. Faltan 6 para hacer la decena.

Dígito

Control = 6



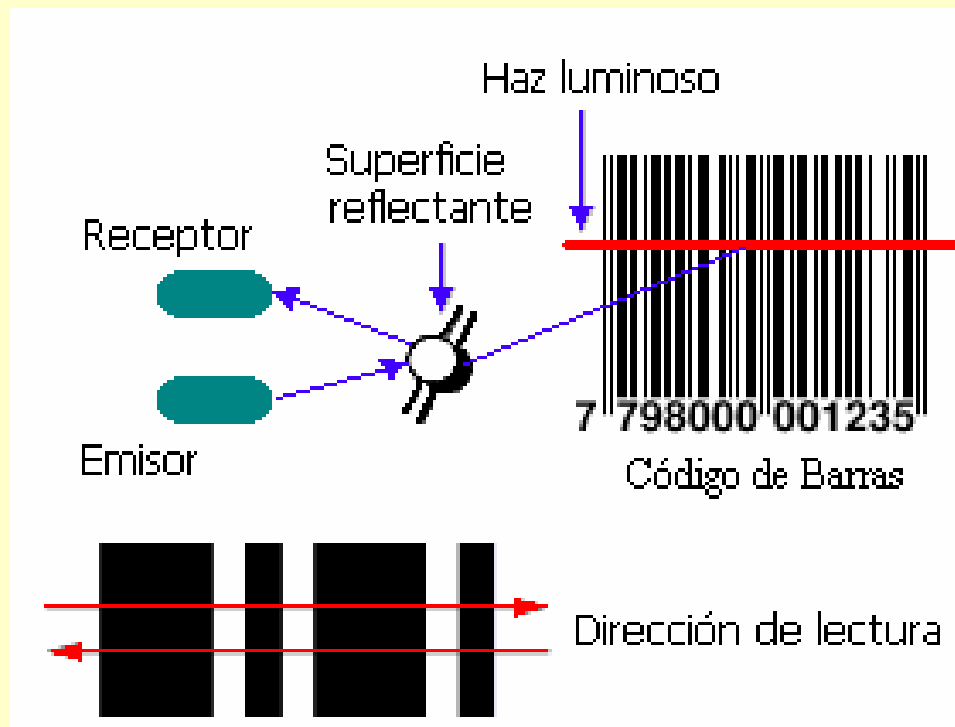
La lectura de códigos de barras:

Lectores tipo pluma o lápiz

Lectores laser tipo pistola

Lectores laser fijos (bibliotecas, cintas transpor.)

Lectores laser fijos omnidireccionales (superm.)



**TAE (TASA ANUAL
EQUIVALENTE)**

¿Qué incluye el T.A.E.?

- **En productos ahorro:** • Si se tienen invertidos 100 euros al 4% anual, a cobrar a año vencido, el primer año recibiré 104. O sea multiplico el capital por 1.04. El 4% es el **interés nominal**.
- Si reinvierto en las mismas condiciones al final del segundo año tendré $104 \times 1.04 = 108.16$. Así al final de 5 años tendré 121.66 euros

Si se tienen invertidos 100 euros durante 5 años y únicamente al final recibo 120 euros, he recibido el 20% de interés, que **parece** ser el 4 % anual. Pero con el 4% anual me salían 121.66 euros. Por tanto esta segunda opción no es lo mismo que recibir 4% anual. La TAE es el interés que me tendrían que dar cada año para que haciendo la cuenta a interés compuesto me salieran 120. Es 3.71% en este caso.

Por eso quien le ha dicho que le garantiza un Fondo de Pensiones a 5 años con el 20% de revalorización, o con el 4% anual nominal le habrá puesto al lado 3.71 TAE.

Al contrario, si le dan 4 euros de interés en un año por los 100 pero le dan 1 en cada trimestre le están permitiendo reinvertirlo. La TAE será superior a 4.

- TAN IMPORTANTE COMO EL INTERÉS QUE LE OFRECEN ES EL PLAZO EN QUE SE PAGA. La TAE es la única forma de comparar inversiones con distintos plazos.

- Cuando una entidad le ofrece aceptarle un plazo fijo de un mes 4% TAE no es que le vaya a dar al final del mes por 100 euros $100 + 4/12$ o sea 100.33

Le dará una cantidad que si la reinvirtiera durante 12 meses en la misma entidad mes a mes al final del año tendría 104 euros. Es exactamente 3.92. A Vd. Le ingresarán 100.32 (y además no le permitirán renovar el plazo otro mes, y a partir de ahí le darán ya el interés normal de esa entidad que será muy similar a otras).

Observe que cuando le ofrecen un interés muy llamativo para un mes (una semana o un día sería ya ridículo) en realidad es muy poco dinero, es simplemente una manera de captárselo para luego darle el interés habitual.

En ahorro no hay mucha diferencia entre nominal y TAE pero donde es importante es en préstamos. Tiene en cuenta el tipo de interés nominal, **los gastos por comisiones** y el plazo de la operación. Da una idea más aproximada del interés real que se paga que el interés nominal.

Comisión de apertura, Comisión de cancelación o amortización anticipada,...

Algunas observaciones sobre TAE

- Utilizar el T.A.E. para comparar sólo préstamos que sean a un mismo plazo. Las comisiones hacen que sea diferente según el plazo para el que se calculan.
- No comparar nunca el T.A.E de un préstamo fijo con el de un préstamo variable, porque no se sabe la evolución de éste.

- En el caso de un préstamo de tipo de interés fijo cuanto menor T.A.E. menos dinero pagaremos.
- Tampoco es comparable el T.A.E de un préstamo personal con el de uno hipotecario. El hipotecario tiene muchos más gastos que no se incluyen en el cálculo del T.A.E. legal, como son los de gastos notariales, seguros obligatorios, etc.

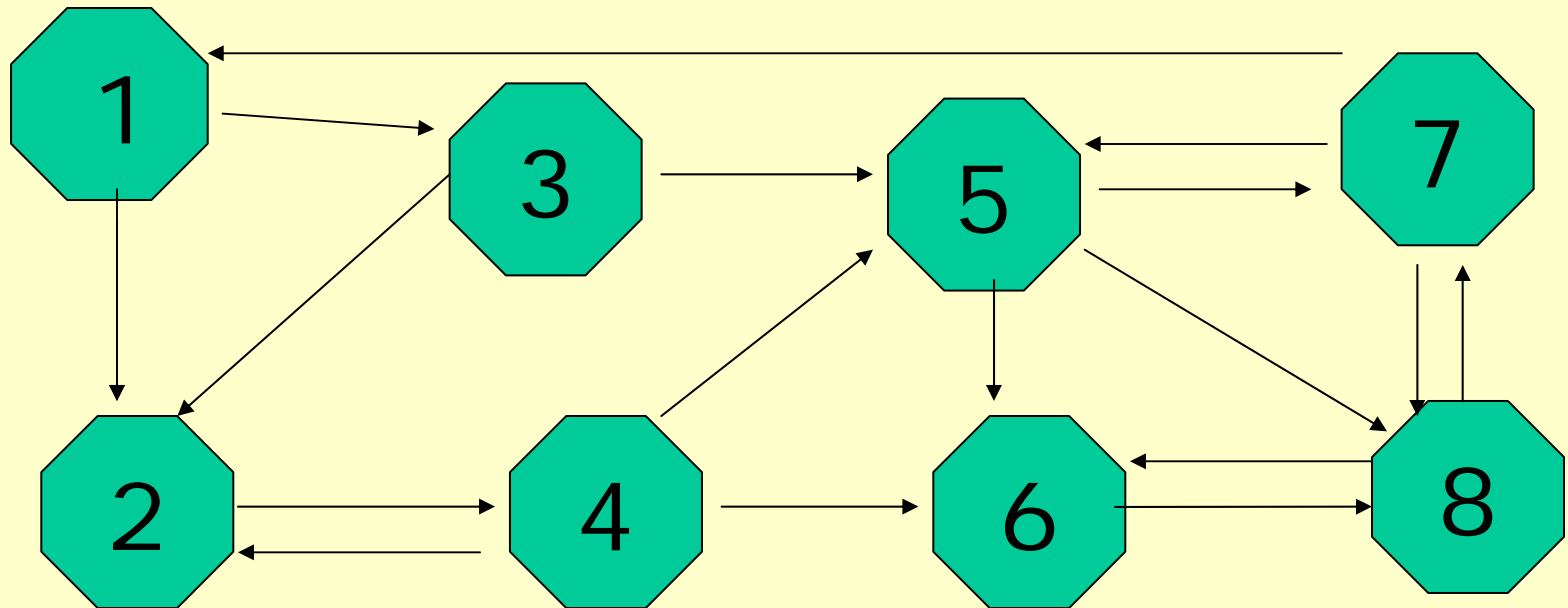
Internet

Miles de millones de páginas

Organización: buscadores anteriores

Brian y Page 1998: Google

Clave: referencias entre páginas. Una es más importante si la refieren muchos, y más si éstos son importantes. Medida de la importancia



Se forma una matriz H 8 filas y 8 columnas

0	0	0	0	0	0	1/3	0
1/2	0	1/2	1/3	0	0	0	0
1/2	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1/2	1/3	0	0	1/3	0
0	0	0	1/3	1/3	0	0	1/2
0	0	0	0	1/3	0	0	1/2
0	0	0	0	1/3	1	1/3	0

Se hacen cálculos matriciales para ordenar las 8 páginas por orden de "importancia". En este caso 8-6-7-5-2=4-1-3

Vector I tal que $HI=I$
(vector propio)



FIN

